تمارين:

[1] ليكن A جبر بولياني لنعرف العمليتين الجديدتين:

$x \rightarrow y = x' \vee y$ و $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$

(أ) برهن أن $x \rightarrow y = 1$ يكافئ $x \leq y$

$x \leftrightarrow y = 1$ يكافئ $x = y$

$(x + y)' = x \leftrightarrow y$

(ب) إذا أخذنا المجموعة المؤلفة من 6 عمليات $(\leftrightarrow , \rightarrow , ' , \vee , \cdot , +)$ أوجد من مجموعة كل زوجين من العمليات السابقة الأزواج التي تعرف الـ 6 عمليات السابقة.

الحل:

(أ)

$x \rightarrow y = 1 \Leftrightarrow x' \vee y = 1 \Leftrightarrow x \leq y$

$x \leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) = 1 \Leftrightarrow x \rightarrow y = 1$ و $y \rightarrow x = 1$

(تعريف الجبر البولياني) $\Leftrightarrow x \leq y$ و $y \leq x \Leftrightarrow x = y$

$(x+y)' = [(x \wedge y') \vee (x' \wedge y)]' = (x \wedge y')' \wedge (x' \wedge y)'$

$= (x' \vee y) \wedge (x \vee y')$

$= (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$

$= (x \rightarrow y)(y \rightarrow x) = x \leftrightarrow y$

(ب) الأزواج الناتجة من 6 عمليات:

$(+,\cdot), (+,\vee), (+,'), (+,\rightarrow), (+,\leftrightarrow), (\cdot,\vee), (\cdot,'), (\cdot,\rightarrow), (\cdot,\leftrightarrow)$

$(\vee,'), (\vee,\rightarrow), (\vee,\leftrightarrow), (',\rightarrow), (',\leftrightarrow), (\rightarrow,\leftrightarrow)$

الأزواج التي تعرف الـ 6 عمليات هي:

$(+,\cdot), (\cdot,'), (\vee,')$

أي:

$(+,\cdot)$: $x \vee y = x + y + xy$

$x' = x + 1$, $x \rightarrow y = x' \vee y$, $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x)$

$(\cdot,')$: $x \vee y = (x'y')'$, $x + y = (xy') \vee (x'y)$

$x \rightarrow y = x' \vee y$, $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x)$

$(\vee,')$: $xy = (x' \vee y')'$, $x + y = (xy') \vee (x'y)$

$x \rightarrow y = x' \vee y$, $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x)$

2 - في الجبر البولياني A نعرف عملية جديدة: $x \downarrow y = x' \vee y'$

أكتب جميع العمليات البوليانية بدلالة هذه العملية.

- الحل:

$x \downarrow x = x' \vee x' = x'$

$x \vee y = x' \downarrow y' = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$

$xy = (x' \vee y')' = (x' \vee y') \downarrow (x' \vee y') = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$

$x + y = (x \vee y) \wedge (x' \vee y') = ((x \vee y) \downarrow (x' \vee y')) \downarrow ((x \vee y) \downarrow (x' \vee y'))$

$= ((x' \downarrow x') \downarrow (x \downarrow y)) \downarrow ((x' \downarrow x') \downarrow (x \downarrow y))$

$= [((x \downarrow x) \downarrow (x \downarrow x)) \downarrow (x \downarrow y)] \downarrow [($

$[((x \downarrow x) \downarrow (x \downarrow x)) \downarrow (x \downarrow y)]$

3 -

ليكن A جبر بولياني و a, b عنصرين ثابتين من A، ولنتكن المعادلة:

(1) --- $ax + b = 0$ في A.

(أ) - برهن أن المعادلة (1) يكون لها حلول إذا وفقط إذا كان $b \leq a$.

(ب) - إذا كان $b \leq a$ فبرهن أن $b \leq b + a + 1$، وأن كل الحلول للمعادلة (1) تحقق $b \leq x \leq a + b + 1$

في أي حالة يكون للمعادلة (1) حل وحيد؟

(ج) - في $D(210)$ حل المعادلتين: $105x + 5 = 0$

$21x + 1 = 0$

الحل: (أ) - نفرض أن للمعادلة (1) حلول أي أنه توجد $x \in A$ تحقق المعادلة (1)

أي أن $ax + b = 0 \Leftarrow ax = b \Leftarrow a \geq b \Leftarrow b \leq a$ ($ax + b + b = b$، $= 0$)

- بالعكس: نفرض أن $b \leq a$ فإن $ab = b \Leftarrow ab + b = 0 \Leftarrow$

$x = b$ هو حل للمعادلة (1).

(ب) - نفرض أن $b \leq a$ فإن: $a + b + 1 = a + b'$

$= (a \wedge b) \vee (a' \wedge b') = (a \wedge b) \vee (a \vee b')$

$= b \vee a' \geq b \Rightarrow a + b + 1 \geq b$ أي $b \leq a + b + 1$

بما أن المعادلة (1) تكتب بالشكل: $ax = b \Leftarrow x \geq ax = b \Leftarrow b \leq x$

$(a + b + 1)x = ax + bx + x = ax + b + x$ (أصغر)

$= 0 + x = x \Rightarrow x \leq a + b + 1$

وعند المتراجحة ينتج أن: $b \leqslant x \leqslant a+b+1$ ويكون الحل وحيد
عندما $b = a+b+1 \Leftarrow a+1=0 \Leftarrow a'=0 \Leftarrow a=1$.

210	2
105	5
35	5
7	7
1	1

Ⓐ $D(210) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}$

العنصر الأصغر

$105x+5=1$

عنصر أكبر

$5 \leqslant x \leqslant 105+5+210$

$105+5+210 = 105+5' = 105+42$

$= (105 \cdot 42') \vee (105' \cdot 42)$

$= (105 \cdot 5) \vee (2 \cdot 42) = 5 \vee 2 = 10$

$5 \leqslant x \leqslant 10$

مجموعة الحلول: $\{5, 10\}$ حسب علاقة الترتيب التقسيم

- للتحقق:

$105x+5=1$

العنصر الأصغر (العنصر البولياني)

$105 \cdot 5 + 5 = 5+5 = 1$

$105 \cdot 10 + 5 = 5+5 = 1$

- لنأخذ المعادلة الأخرى:

$21x+1=0$

$1 \leqslant x \leqslant 21+1+210$

$21+1+210 = 21+210 = (21 \cdot 210') \vee (21' \cdot 210) = (21 \cdot 1) \vee (10 \cdot 210)$

$= 1 \vee 10 = 10$

$1 \leqslant x \leqslant 10$ ← (تقبل القسمة على (1) وتقسم (10))

مجموعة الحلول: $\{1, 2, 5, 10\}$

- للتحقق:

العنصر الأصغر

$21 \cdot 1 + 1 = 1+1 = 0$

$21 \cdot 2 + 1 = 1+1 = 0$

$21 \cdot 5 + 1 = 1+1 = 0$

$21 \cdot 10 + 1 = 1+1 = 0$

4 - لحل المتراجحة البوليانية: $ax+b \leqslant c$ (يمكن ردها إلى معادلة)

من الموضوع (1) من التمرين السابق.

في $D(210)$ حل المتراجحة: $6x+2 \leqslant 3$ ، $7x+5 \leqslant 105$



الحل: $ax+b \leqslant c \Leftrightarrow (ax+b)c = ax+b \Leftrightarrow$

$acx+bc = ax+b \Leftrightarrow acx+ax+bc = b$

$\Leftrightarrow acx+ax = b+bc \Leftrightarrow (ac+a)x = b+bc$

شرط الحل: $b+c \leqslant ac+a$ وذلك إعتماداً على التعريف السابق.

وتكون مجموعة الحلول معطاة بالشكل:

$b+bc \leqslant x \leqslant (ac+a)+(bc+b)+1$

فإذا أخذنا المتراجحة: $D(210)$ في $7x+5 \leqslant 105$ ($a=7$, $b=5$, $c=105$)

عوض: $5+5.105 \leqslant x \leqslant [(7.105)+(7)]+[(5.105)+(5)]+210$

$5+5 \to 1 \leqslant x \leqslant (7+7)+(5+5)+210$

$1 \leqslant x \leqslant 0+0+210$

$1 \leqslant x \leqslant 210$

مجموعة الحلول هي جميع قواسم 210

للقسمة: $7.3+5 = 1+5 = (1.42) \vee (210.5) = 1 \vee 5 = 5 \leqslant 210$

⋮

وإذا أخذنا المتراجحة: $6x+2 \leqslant 3$ ($a=6$, $b=2$, $c=3$)

$2+2.3 \leqslant x \leqslant [(6.3)+(6)]+[(2.3)+2]+210$

$2+1 \leqslant x \leqslant (3+6)+(1+2)+210$

$2+1 = (2.210) \vee (105.1) = 2 \vee 1 = 2$

$5+6 = (3.35) \vee (70.6) = 1 \vee 2 = 2$

$(1+2)+210 = 2+210 = 105$

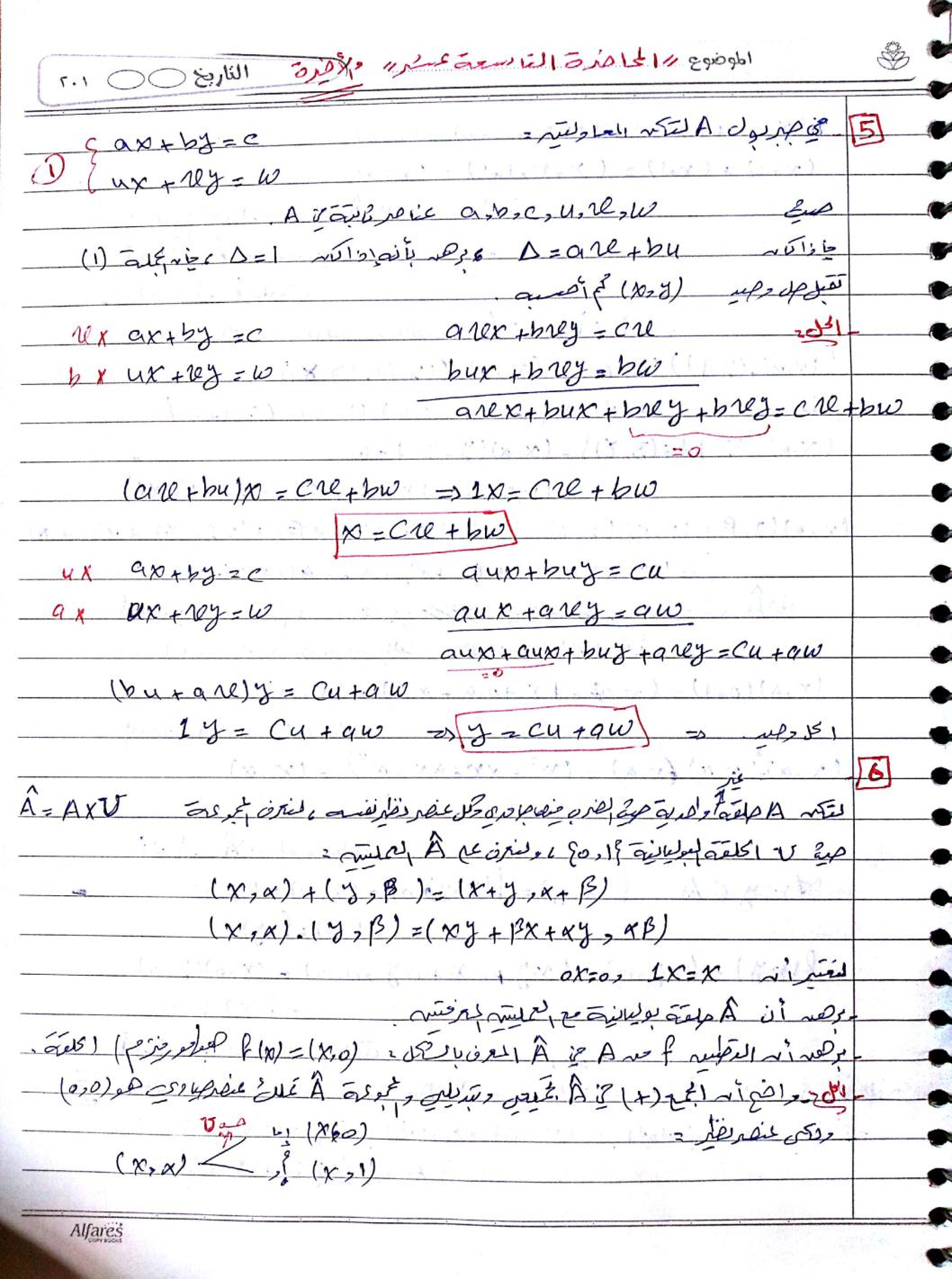
$(3+6)+(1+2)+210 = 2+105 = (2.2) \vee (105.105)$

$= 2 \vee 105 = 210$

$2 \leqslant x \leqslant 210$

مجموعة الحلول: $\{2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210\}$.

m.t



5] في جبر بول A لتكن المعادلتين:

$$(1)\ \begin{cases} ax+by=c \\ ux+vy=w \end{cases}$$

حيث a,b,c,u,v,w عناصر ثابتة في A.

فإذا كان $\Delta = av+bu$. برهن بأنه إذا كان $\Delta = 1$ ، فإن الجملة (1) تقبل حل وحيد ثم أحسبه.

- الحل:

$v \times \quad ax+by=c \qquad avx+bvy=cv$

$b \times \quad ux+vy=w \qquad bux+bvy=bw$

$$avx+bux+\underbrace{bvy+bvy}_{=0}=cv+bw$$

$$(av+bu)x = cv+bw \Rightarrow 1x = cv+bw$$

$$\boxed{x = cv+bw}$$

$u \times \quad ax+by=c \qquad aux+buy=cu$

$a \times \quad ux+vy=w \qquad aux+avy=aw$

$$\underbrace{aux+aux}_{=0}+buy+avy=cu+aw$$

$$(bu+av)y = cu+aw$$

$$1y = cu+aw \Rightarrow \boxed{y = cu+aw} \Rightarrow$$ الحل وحيد

6] لتكن A حلقة بولية (غير أحادية) حيث الضرب فيها تجميعي وكل عنصر نظير نفسه، لنعرف المجموعة $\hat{A} = A \times V$ حيث V الحلقة البوليانية $\{0,1\}$ ، ولنعرف على $\hat{A}$ العمليتين:

$$(x,\alpha)+(y,\beta) = (x+y, \alpha+\beta)$$

$$(x,\alpha)\cdot(y,\beta) = (xy+\beta x+\alpha y, \alpha\beta)$$

باعتبار أنه $0x=0$, $1x=x$.

- برهن أن $\hat{A}$ حلقة بوليانية مع العمليتين المعرفتين.
- برهن أن التطبيق f من A في $\hat{A}$ المعرف بالشكل: $f(x)=(x,0)$ هومومورفيزم (تشاكل) الحلقة.

- الحل: واضح أن الجمع $(+)$ في $\hat{A}$ تجميعي وتبديلي ، ومجموعة $\hat{A}$ تملك عنصر حيادي هو $(0,0)$ ولكل عنصر نظير:

$(x,\alpha) <$ إما $(x,0)$ ، أو $(x,1)$ ، $\alpha \in V$

$(x,0)+(x,0)=(x+x,\ 0+0)=(0,0)$

$(x,1)+(x,1)=(x+x,\ 1+1)=(0,0)$

من جميع الأحوال نجد أنه في $\hat{A}$ كل عنصر هو نظير نفسه.

أي أن $\hat{A}$ زمرة تبديلية بالنسبة للجمع.

لنبرهن أن $\hat{A}$ حلقة:

- الخاصة التجميعية بالنسبة للضرب في $\hat{A}$ محققة أي أن:

$((x,\alpha).(y,\beta))(z,\gamma)=(x,\alpha).((y,\beta).(z,\gamma))$

$\forall (x,\alpha),(y,\beta),(z,\gamma)\in\hat{A}$: وخاصية التبديلية محققة بالنسبة للضرب.

$(x,\alpha)[(y,\beta)+(z,\gamma)]=(x,\alpha)(y+z,\ \beta+\gamma)$

$=(xy+xz+\beta x+\gamma x+\alpha y+\alpha z,\ \alpha\beta+\alpha\gamma)$

$(x,\alpha)(y,\beta)+(x,\alpha).(z,\gamma)=(xy+\beta x+\alpha y,\ \alpha\beta)+(xz+\gamma x+\alpha z,\ \alpha\gamma)$

$=(xy+xz+\beta x+\gamma x+\alpha y+\alpha z,\ \alpha\beta+\alpha\gamma)$

أي أن الضرب يقبل التوزيع على الجمع [struck through] وبالتالي فإن $\hat{A}$ حلقة.

- إن $(0,1)$ هو عنصر حيادي بالنسبة لعملية الضرب لأن:

$(x,\alpha)(0,1)=(x.0+1.x+0.\alpha+\alpha.1)=(x,\alpha)$

- الخاصة الجامدية محققة:

$(x,\alpha)^2=(x,\alpha)(x,\alpha)=(x^2+\underbrace{\alpha x+\alpha x}_{=0},\ \alpha^2)=(x,\alpha)$

من حلقة بوليانية ولأن فرضاً كل عنصر نظير نفسه

أي أن $\hat{A}$ هي حلقة بوليانية.

- $\forall x,y\in A,\ f(x+y)=f(x+y,0)=(x,0)+(y,0)$

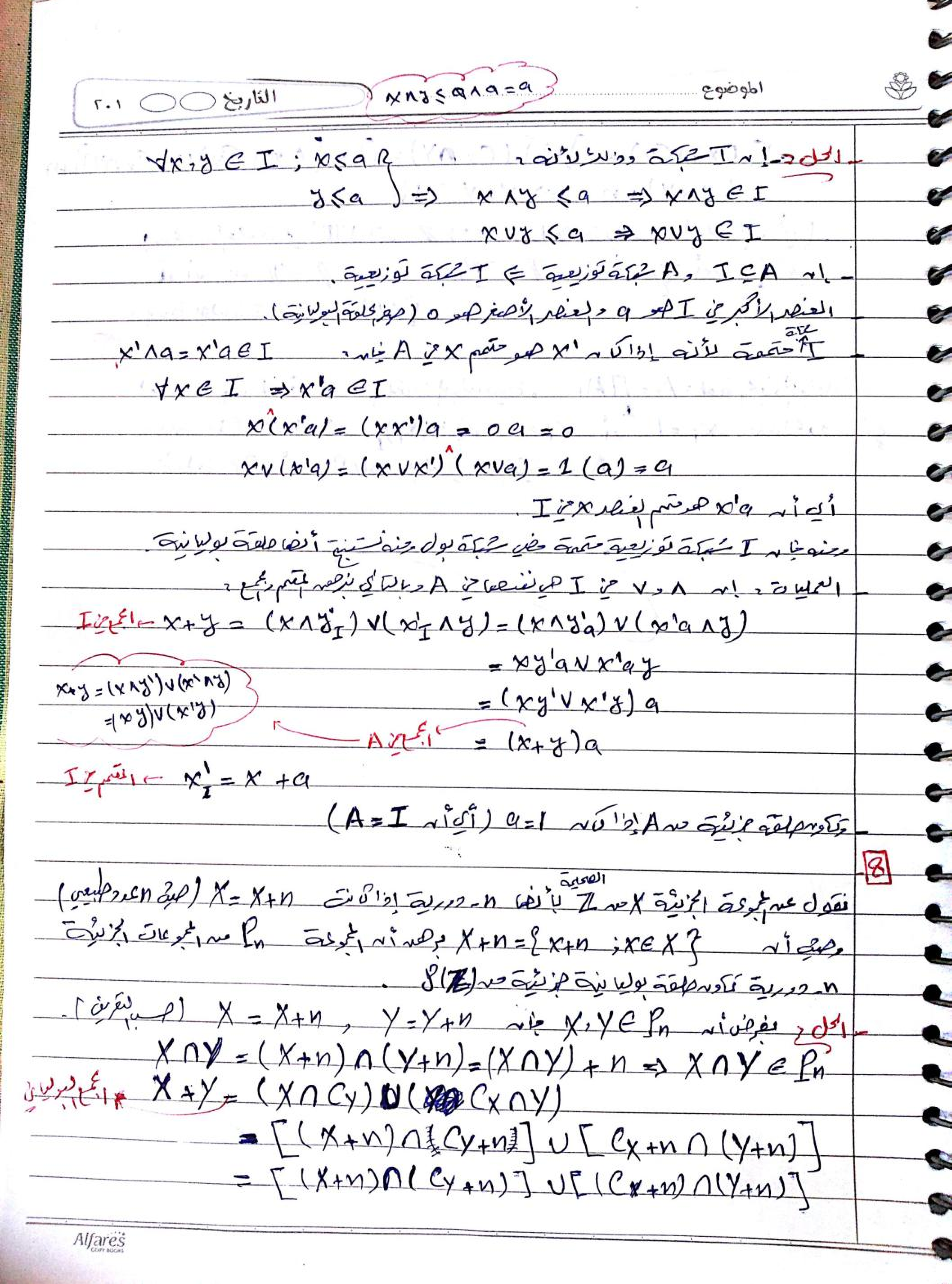
$=f(x)+f(y)$

$f(xy)=(xy,0)=(xy+0x+0y,\ 0.0)=(x,0)(y,0)$

$=f(x).f(y)$

أي أن f هو مورفيزم حلقة.

7 - لتكن $\hat{A}$ حلقة بوليانية و $a\in A$ $(a\neq 0)$ مثالية فيها، برهن أن $I=Aa$ حلقة بوليانية مع أخذ علاقة الترتيب المولدة وعرف جميع العمليات البوليانية على I. في أي حالة تكون I حلقة جزئية من A ؟



الحل :- ١) ان I شبكة وذلك لأنه $\forall x,y \in I ;\ x \le a$ ، $y \le a \Rightarrow x \wedge y \le a \Rightarrow x\wedge y \in I$

$x \vee y \le a \Rightarrow x \vee y \in I$

- ان $I \subseteq A$ ، A شبكة توزيعية ⇐ I شبكة توزيعية.

- العنصر الأكبر في I هو a والعنصر الأصغر هو 0 (صفر الحلقة البوليانية).

- I متممة لأنه إذا كان x' هو متمم x في A فإن $x' \wedge a = x'a \in I$

$\forall x \in I \Rightarrow x'a \in I$

$x \wedge (x'a) = (xx')a = 0a = 0$

$x \vee (x'a) = (x \vee x') \wedge (x \vee a) = 1(a) = a$

أي أن $x'a$ هو متمم العنصر x في I.

ومنه فإن I شبكة توزيعية متممة أي شبكة بول ومنه نستنتج أنها حلقة بوليانية.

- العمليات : ان ∧ و ∨ في I هي نفسها في A وبالتالي نرجع التمم والجمع

الجمع في I ← $x+y = (x\wedge y'_I)\vee(x'_I \wedge y) = (x \wedge y'_a)\vee(x'a \wedge y)$

$= xy'a \vee x'ay$

$= (xy' \vee x'y)a$

$= (x+y)a$ ← الجمع في A

$x+y = (x\wedge y')\vee(x'\wedge y) = (xy')\vee(x'y)$

التمم في I ← $x'_I = x + a$

- وتكون حلقة جزئية من A إذا كان $a=1$ (أي أن $A = I$)

8

نقول عن المجموعة الجزئية X من $\mathbb{Z}$ الصحيحة بأنها n-دورية إذا كانت $X = X+n$ (حيث n عدد طبيعي)

وحيث أن $X+n = \{x+n ; x \in X\}$ وهو أن المجموعة P_n من المجموعات الجزئية n-دورية تكون حلقة بوليانية جزئية من $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

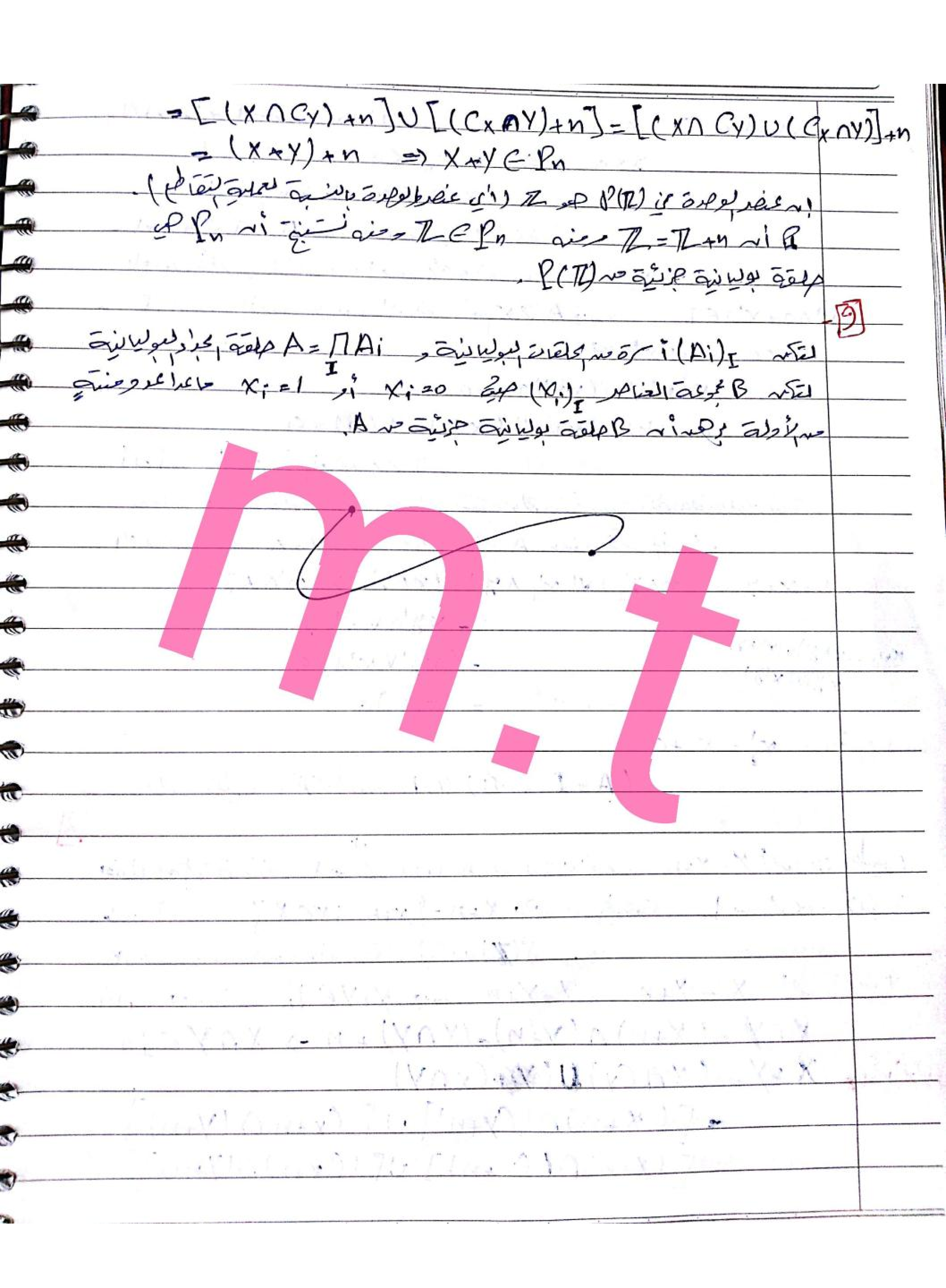
الحل :- نفرض أن $X, Y \in P_n$ فإن $X = X+n$ ، $Y = Y+n$ (حسب التعريف).

$X \cap Y = (X+n)\cap(Y+n) = (X\cap Y)+n \Rightarrow X \cap Y \in P_n$

الجمع البولياني * $X+Y = (X \cap C_Y)\cup(C_X \cap Y)$

$= [(X+n)\cap\{C_{Y+n}\}] \cup [C_{X+n} \cap (Y+n)]$

$= [(X+n)\cap(C_Y+n)] \cup [(C_X+n)\cap(Y+n)]$



$= [(X \cap C_Y) + n] \cup [(C_X \cap Y) + n] = [(X \cap C_Y) \cup (C_X \cap Y)] + n$

$= (X + Y) + n \Rightarrow X + Y \in P_n$

إن عنصر الوحدة في $P(\mathbb{Z})$ هو $\mathbb{Z}$ (أي عنصر الوحدة بالنسبة لعملية التقاطع).

أي أن $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + n$ ومنه $\mathbb{Z} \in P_n$ ومنه نستنتج أن P_n هي حلقة بوليانية جزئية من $P(\mathbb{Z})$.

9 -

لتكن $(A_i)_I$ أسرة من الحلقات البوليانية و $A = \prod_I A_i$ حلقة الجداء البوليانية لتكن B مجموعة العناصر $(x_i)_I$ حيث $x_i = 0$ أو $x_i = 1$ ما عدا عدد منتهٍ من الأدلة. برهن أن B حلقة بوليانية جزئية من A.